Université Paris 7 - L1 MASS- Probabilits finies et sondage (51MT1PF2) Examen du 22 mai 2012

Durée : 3 heures. Ni les documents ni les téléphones ne sont autorisés

Exercice 1. (2 points)

Soit P une probabilité sur $\Omega = \{1, 2, 3\}$ satisfaisant

$$P\big(\{1,2\}\big) = 1/2, \quad P\big(\{2,3\}\big) = 5/6.$$

(1) Calculer $P(\{2\})$.

(2) Calculer $P(\{1,3\})$.

Exercice 2. (3 points)

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace de probabilité (Ω, P) à valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, et telle que

$$P(X=0) = \frac{8}{27}, \quad P(X=1) = \frac{12}{27}, \quad P(X=2) = \frac{6}{27}.$$

(1) Calculer $P(X = 3)$.

(2) Déterminer l'espérance de X.

(3) Calculer la variance de X.

(4) Calculer $E\big(X^3\big)$.

Exercice 3. (2 points) Dans une population, on sait que 36% des ménages possèdent un chien et 30% un chat. On sait également que 22% des ménages qui possèdent un chien ont aussi un chat.

(1) Quelle est la probabilité qu'un ménage tiré au hasard dans cette population possède à la fois un chien et un chat ?

(2) Quelle est la probabilité qu'un ménage possèdant un chat, possède aussi un chien ?

Exercice 4. (3 points) Une urne contient 9 jetons numérotés de 1 à 9. On tire au hasard successivement et sans remise les 9 jetons.

(1) Définir un espace de probabilité (Ω, P) correspondant à cette expérience.

(2) Quelle est la probabilité d'obtenir le jeton numéro 1 au premier tirage ?

(3) Quelle est la probabilité d'obtenir le jeton numéro 1 au dernier tirage ?

Exercice 5. (5 points)

Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles telle pour tout sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ on a

$$P(X \in A) = P(-X \in A).$$

On suppose de plus que $P(X = 0) = 0$.

(1) Soit la variable aléatoire $Y = 1_{\{X>0\}}$. Quelle est la loi de Y ?

(2) Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$P\big(|X| \in B\big) = 2\,P(X \in B).$$

(3) Montrer que $|X|$ et Y sont des variables aléatoires indépendantes.

Exercice 6. (5 points)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$$P(X = 1) = 1/2, \quad P(X = 2) = 1/2$$

$$P(Y = 1) = 1/4, \quad P(Y = 2) = 1/2, \quad P(Y = 3) = 1/4$$

(1) Calculer $E(X)$; $Var(X)$; $E(Y)$; $Var(Y)$.

(2) On pose $T = X + Y$. Calculer $E(T)$ et $Var(T)$.

(3) On pose $Z = XY$. Calculer $E(Z)$ et $Var(Z)$.