Université Paris 7 - L1 MASS Correction du partiel

Exercice 1. On a :

$$P(A \cup B) = P(\Omega) = 1 = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

d'une part, et

$$P(A^c)P(B^c) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B),$$

d'autre part, donc

$$P(A)P(B) - P(A^c)P(B^c) = P(A) + P(B) - 1 = P(A \cap B).$$

Exercice 2. On considère l'espace de probabilité suivant associé à l'expérience :

Ω est l'ensemble des tirages possibles, non ordonnés, des 8 cartes. On a donc $\binom{52}{8}$ ensembles de cartes possibles. Comme le jeu est bien mélangé, chaque sortie est équiprobable, donc a une probabilité $1/\binom{52}{8}$ de sortir.

Calculons les probabilités demandées :

- *Quatre d'entre elles sont des as.*

  Comme il y a quatre as dans le jeu, on n'a aucun choix sur le fait d'avoir les quatre as. Les autres cartes peuvent être choisies au choix parmi les 48 autres, on a donc $\binom{48}{4}$ possibilités de remplir la condition : la probabilité de gagner est donc

  $$P = \binom{48}{4} \Big/ \binom{52}{8}$$

- *Quatre d'entre elles soient des as, et deux soient des rois.*

  De la même façon, les quatre as sont imposés. On a le choix sur les deux dernière cartes parmi les non-rois et les non-as, et on peut choisir deux des rois parmi les quatre disponibles : On a donc $\binom{44}{4} \times \binom{4}{2}$ possibilités. La probabilité de gagner est donc

$$P = \binom{44}{4} \times \binom{4}{2} / \binom{52}{8}$$

- *Trois cartes aient la même couleur, et trois autres aient une autre même couleur (les "couleurs" sont pique, trèfle, carreaux et cœur).*

  On choisit les deux couleurs : $\binom{4}{2}$, puis pour chaque couleur, on choisit les trois cartes : $\binom{13}{3}^2$, et enfin on choisit les deux cartes restantes parmi les autres couleurs : $\binom{26}{2}$. On a donc une probabilité

$$P = \binom{4}{2} \times \binom{13}{3}^2 \times \binom{26}{2} / \binom{52}{8}$$

- *Au moins une carte soit un as.*

$$P = \binom{4}{1} \times \binom{51}{7} / \binom{52}{8}$$

Exercice 3. On note Ω l'ensemble des triplets de nombres entre 1 et 6, désignant le résultat des trois dés. Chaque triplet a la même probabilité de sortir, à savoir $\frac{1}{6^3}$.

- $P(X = 3)$: Il n'y a qu'une seule situation gagnante, à savoir le triplet correspondant au cas où on a eu trois fois la valeur choisie. Donc $P(X = 3) = \frac{1}{6^3}$.
- $P(X = 2)$: On choisit les deux dés qui vont donner le bon numéro (3 possibilités), puis l'autre doit indiquer un *autre* numéro. Donc $P(X = 2) = 3 * \frac{1}{6^2} * \frac{5}{6} = \frac{15}{6^3}$.
- $P(X = 1) = \frac{3*5^2}{6^3}$.
- $P(X = -1) = \frac{5^3}{6^3}$.

Espérance de X :

$$E[X] = 3 * P(X = 3) + 2 * P(X = 2) + 1 * P(X = 1) - P(X = -1) = \frac{-17}{6^3}$$

Variance de X :

$$\begin{aligned}
V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\
&= 9 * P(X=3) + 4 * P(X=2) + 1 * P(X=1) + 1 * P(X=-1) - \frac{17^2}{6^6} \\
&= \frac{269}{6^3} - \frac{17^2}{6^6}
\end{aligned}$$

Exercice 4. On écrit les probabilités données dans l'énoncé : "R" désigne le fait d'être résistant, et "P" désigne le fait d'avoir un résultat positif. On note avec une barre le complémentaire :

$$P(P|R) = 0.95, \qquad P(\bar{P}|\bar{R}) = 0.98 \qquad , P(R) = 0.03$$

Et on veut $P(R|P)$. On a :

$$P(R|P) = \frac{P(R \cap P)}{P(P)} = \frac{P(P|R) * P(R)}{P(P)}$$

et

$$\begin{aligned}
P(P) &= P(P \cap R) + P(P \cap \bar{R}) = P(P|R)P(R) + P(P|\bar{R})P(\bar{R}) \\
&= P(P|R)P(R) + (1 - P(\bar{P}|\bar{R})) * (1 - P(R)),
\end{aligned}$$

donc

$$P(R|P) = \frac{P(P|R) * P(R)}{P(P|R)P(R) + (1 - P(\bar{P}|\bar{R})) * (1 - P(R))} = \frac{1}{1 + \frac{(1-P(\bar{P}|\bar{R}))*(1-P(R))}{P(P|R)*P(R)}}.$$

En remplaçant par les valeurs de l'énoncé,

$$P(R|P) = \frac{1}{1 + \frac{0.02*0.97}{0.95*0.03}} \sim \frac{3}{5}$$

Exercice 5. Comme il y a un grand nombre d'articles, et que l'énoncé ne suppose pas combien, on suppose que la proportion p d'articles défectueux ne change pas quand on enlève quelques articles du lot :

Pour que le lot soit accepté, il faut soit être tombé sur deux bons articles au premier coup $(1-p)^2$, soit être tombé sur un bon et un mauvais, puis deux bons : $2p(1-p) * (1-p)^2$.

On a donc une probabilité d'être accepté de

$$P = (1-p)^2 + 2p(1-p) * (1-p)^2$$