Test 3, durée 45min.

Les calculatrices, documents, et téléphones portables sont interdits.

Exercice 1 :
Dans $\mathbb{R}_3[X]$ muni du produit scalaire ϕ (on ne demande pas de montrer que c'en est un) défini par :

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t,$$

on considère le sous-espace E de $\mathbb{R}_3[X]$ constitué des polynômes P tels que $P(0) = P'(0) = 0$. Donner une base de E et l'orthonormaliser. En déduire la projection orthogonale de $X^2 - 1$ sur E.

Exercice 2 :
Selon le paramètre réel x, dire si la matrice suivante est diagonalisable, si oui donner ses valeurs propres avec multiplicité :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :

1. Soit $\mathscr{C}_R$ le disque de rayon R centré en l'origine du plan. Calculer grâce à un changement de variable en polaire

$$\iint_{\mathscr{C}_R} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

2. En déduire l'existence et la valeur de

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$