Université Paris 7 - Denis Diderot | Cours de Mathématiques-MP4
Licence de Physique , L2 | 2011-2012, 2^{nd} semestre

Feuille de TD 8

Matrices orthogonales et produit mixte

Exercice 1 :
Montrer que chacune des matrices suivantes représente une rotation de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, dont on déterminera l'axe et l'angle correspondant :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & 1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :
Diagonaliser dans une base orthonormée les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 :
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est diagonalisable sur une base orthonormée.
2. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle f se diagonalise.

Exercice 4 :
Soit $f_{a,b}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ b & 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $f_{a,b}$ est diagonalisable sur une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$.
2. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ sur laquelle $f_{a,b}$ se diagonalise.

Exercice 5 :
On considère la matrice

$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que M est orthogonale.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont M est la matrice dans la base canonique.

2. Montrer que f est diagonalisable.
3. Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ sur laquelle la matrice f est diagonale.

Exercice 6 :
Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ \forall y \in \mathbb{R}^3,\ \forall z \in \mathbb{R}^3, \quad x \wedge (y \wedge z) + y \wedge (z \wedge x) + z \wedge (x \wedge y) = 0.$$

Exercice 7 :
Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Discuter et résoudre l'equation $a \wedge x = b$.

Exercice 8 :
Dans l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs

$$v_1 = (1, -1, 2)\,;\ v_2 = (-2, 2, k)\,;\ w = v_1 \wedge v_2.$$

1. Sans calculer w, répondre aux questions suivantes :
   (a) A quelle condition sur k a-t-on $w \neq 0$?
   (b) A quelle condition sur k le système (v_1, v_2, w) est-il une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$?
2. Calculer w.
3. Soit $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$. A quelle condition sur k a-t-on $\dim(F) = 2$? Dans ce cas, donner une équation de F.

Exercice 9 :
Soit k un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ et soit R la rotation vectorielle d'angle θ et d'axe la droite vectorielle engendrée par k et orientée par k. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$ on a

$$R(x) = (\cos\theta)x + (\sin\theta)k \wedge x + 2\langle x, k\rangle \sin^2(\frac{\theta}{2})k.$$

Exercice 10 :
Déterminer les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ des transformations suivantes :

1. Le retournement d'axe $\mathbb{R}(1, 2, 1)$.
2. Le retournement d'axe $\mathbb{R}(1, 1, 1)$.
3. La rotation d'axe orienté $\mathbb{R}(1, 1, 1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Exercice 11 :
On considère l'espace vectoriel euclidien canonique et orienté $\mathbb{R}^3$. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ et $p = [a, b, c]$ le produit mixte de a, b et c. Exprimer à l'aide de p les quantités suivantes :

1. $s = [a + b, b + c, c + a]$.
2. $t = [a \wedge b, b \wedge c, c \wedge a]$.