Université Paris 7 - Denis Diderot — Cours de Mathématiques-MP4
Licence de Physique , L2 — 2011-2012, 2^{nd} semestre

Feuille de TD 2
Intégrales impropres

Exercice 1 :
Etudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leur valeur si elles convergent :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}; \quad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)t^2}; \quad \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt; \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^2}; \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt; \quad \int_0^{+\infty} \tanh t\,dt; \quad \int_0^1 \ln x\,dx; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \cos t\,dt$$

Exercice 2 :
Étudier la convergence des intégrales :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}; \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt; \quad \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\,dx; \quad \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{(x^2-x-2)^2}}dx.$$

Exercice 3 :
Etudier suivant les valeurs des réels $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale :

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)}.$$

Représenter graphiquement l'ensemble $C = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ I_{\alpha,\beta} \text{ converge}\}$.

Exercice 4 :
Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt; \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \log(\tan t)dt; \qquad I_3 = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}},\ \text{où } a < b$$

Exercice 5 :
Etudier la nature des intégrales :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t^2}; \qquad \int_0^{+\infty} \arcsin\left(\frac{\sin t}{t}\right)dt; \qquad \int_0^{+\infty} \cos(e^t)dt;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt,\ \alpha > 0; \qquad \int_0^{+\infty} (x+1-\sqrt{x^2+2x+2})dx; \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t};$$

$$\int_0^1 \sin t \log t\ dt; \qquad \int_1^{+\infty} \arctan \frac{1}{t}dt; \qquad \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log(\cos \frac{1}{t})dt;$$

$$\int_0^1 \frac{dt}{t^2-\sqrt{t}}; \qquad \int_0^{+\infty} (x^7-7x^4+16x^3-5x+2)e^{-x}dx; \qquad \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx;$$

Exercice 6 :
Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ les intégrales suivantes sont convergentes.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+a}dt; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}+a\sin x}{x^2}dx; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{5dx}{x^3-ax^2+x-a}$$

Exercice 7 :
Soit $\alpha > 0$ et soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x}.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞, strictement positive puis que f n'est pas bornée.
2. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

$$\frac{\pi(-\pi/2 + k\pi)}{\sqrt{1 + (\pi/2 + k\pi)^\alpha}} \leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x}\, dx \leqslant \frac{\pi(\pi/2 + k\pi)}{\sqrt{1 + (-\pi/2 + k\pi)^\alpha}}$$

   En déduire que si $k \in \mathbb{N}^*$ est assez grand nous avons :

$$\frac{\pi^{2-\alpha/2}}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha/2-1}} \geqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x}\, dx \geqslant 3\frac{\pi^{2-\alpha/2}}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha/2-1}}$$

3. On considère la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x}\, dx$$

   Montrer que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente si et seulement si nous avons $\alpha > 4$.
4. En déduire que l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x}\, dx$$

   est convergente si et seulement si $\alpha > 4$.

Exercice 8 :
1. Montrer que la suite (u_n) suivante est divergente :

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2.$$

2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 4$ nous avons :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t \log t} \geqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k \log k}.$$

3. En déduire que l'intégrale généralisée I suivante est divergente :

$$I = \int_2^{+\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t \log t}$$

Exercice 9 :
Donner un exemple (sous forme de dessin) de fonction continue positive telle que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x$$

existe mais qu'on n'ait pas $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$