MP4 Université Paris 7
2011-2012 Denis Diderot

PARTIEL

Samedi 17 Mars (durée 3h)

Exercice 1.

Pour chaque $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_0^1 \ln(1+e^{(x+t)})\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto F(x)$ est définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, F'(x) = \ln(\frac{1+e^{x+1}}{1+e^x})$.
3. Montrer que F est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.
5. Montrer qu'en fait $F(x) \sim x$, lorsque $x \to +\infty$. (On pourra montrer que $\forall x \geq 0\,,\ x + \ln 2 + \frac{1}{2} \geq F(x) \geq x + \frac{1}{2}$).

Exercice 2.

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, les intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^2}$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(x+t)^3}$ convergent.
2. Montrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$ converge. On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$.
3. Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x \in]1, +\infty[\,,\ F'(x) = -2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{(x+t)^3}\mathrm{d}t$.
4. Grâce à une intégration par parties, montrer que $\forall x \in]1, +\infty[, F'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^2}\mathrm{d}t$.
5. Montrer que F' est de classe C^1 sur $]1, +\infty[$ et que $\forall x \in]1, +\infty[, F''(x) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{(x+t)^3}\mathrm{d}t$.
6. Grâce à une intégration par parties portant sur l'expression intégrale de $F''(x)$, montrer que F est solution de l'équation différentielle suivante sur $]1, +\infty[$:
$$y'' + y' - \frac{1}{x^2} = 0.$$
7. Montrer qu'en fait F est définie et de classe C^2 sur $]0, +\infty[$. (On pourra montrer que F est de classe C^2 sur tous les intervalles $]a, +\infty[$ où $a > 0$).

Exercice 3.

1. Soit la partie P de $\mathbb{R}^2$ définie par $P = P_1 \cap P_2$, où

$$P_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 - 2y \geq 0\} \quad , \quad P_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - 2x^2 + 4x \geq 0\}.$$

   (a) Dessiner P.

   (b) Calculer l'aire de P.

2. Soit T l'intérieur du triangle ABC où $A = (-1,-1), B = (0,2), C = (2,-1)$.

   (a) Montrer que la fonction $(x,y) \mapsto \frac{1}{(3x+y+6)^2}$ est bien définie sur la partie T de $\mathbb{R}^2$.

   (b) Calculer l'intégrale double suivante:

$$I = \iint_T \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(3x+y+6)^2}.$$