MP4 — Université Paris 7
2011-2012 — Denis Diderot

EXAMEN
Deuxième Session
Vendredi 29 Juin (durée 3h)

Exercice 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F(x) = \int_{-1}^{1} \arctan(xe^t)\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto F(x)$ est définie et de classe $C1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $F'(x) = \frac{1}{x}(\arctan(xe) - \arctan(xe^{-1})$ et calculer $\lim\limits_{x\to 0} F'(x)$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-\pi \leq F(x) \leq \pi$.
4. Montrer que F est une fonction impaire strictement croissante.
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\pi$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\pi$.

Exercice 2. Soit $I = \iint_D e^{x^2+y^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2/\, y > |x| \,,\, x^2 + y^2 < 1\}$.

1. Dessiner D.
2. Calculer I (On pourra le faire en coordonnées polaires).

Exercice 3. a étant un paramètre réel, soit b la forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre a , la forme bilinéaire b est-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?
2. On suppose que $a = 3$.
   (a) Montrer que pour tout $v = (x, y, z), v' = (x', y', z')$, vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on a :
   $$b(v, v') = (x - y + z)(x' - y' + z') + (y + z)(y' + z') + zz'.$$
   On suppose maintenant que $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire b et on note $\langle v, v'\rangle = b(v, v')$ et $\| v \|= \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
   (b) Construire $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, l'orthonormalisé de Gram-Schmidt de la base canonique $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(c) On oriente cet espace euclidien de telle sorte que $\underline{\varepsilon}$ soit directe. Calculer $e_2 \wedge e_3$ dans cet espace euclidien orienté de dimension 3.

Exercice 4. Soit le système différentiel linéaire suivant :

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = 2x - y + e^t \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

1. Donner tout d'abord une base de l'espace vectoriel complexe des solutions complexes du système homogène suivant :

$$(H) \qquad \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

2. Donner ensuite une base de l'espace vectoriel réel des solutions réelles du système homogène (H).

3. Montrer qu'il existe une solution particulière X_0 de (S) de la forme :

$$X_0(t) = e^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

où a et b sont des constantes réelles, et la calculer.

4. Donner la solution du système (S) satisfaisant les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 1/2\,,\; y(0) = -1/2.$$