

### Correction du test 3

#### Exercice 1 :

$E$  est l'ensemble des polynômes de degré inférieur à 4 qui ont 0 pour racine double, c'est donc l'espace engendré par  $X^2, X^3$ . On orthonormalise cette base :

$$\phi(X^2, X^2) = \int_0^1 t^4 dt = \frac{1}{5}.$$

On pose donc  $e_1 = \sqrt{5}X^2$ .

On a ensuite :

$$\phi(e_1, X^3) = \sqrt{5} \int_0^1 t^5 dt = \sqrt{5} \frac{1}{6},$$

et

$$X^3 - \phi(e_1, X^3)e_1 = X^3 - \frac{5}{6}X^2,$$

$$\|X^3 - \frac{5}{6}X^2\|^2 = \phi(X^3 - \frac{5}{6}X^2, X^3 - \frac{5}{6}X^2) = \int_0^1 (t^3 - \frac{5}{6}t^2)^2 dt = \frac{1}{252} = \frac{1}{7 \times 6^2}.$$

On pose donc  $e_2 = \sqrt{7}(6X^3 - 5X^2)$ .

La base  $e_1, e_2$  est donc une base orthonormale de  $E$ .

La projection orthogonale de  $X^2 - 1$  sur  $E$  est donc :

$$p_E(X^2 - 1) = \phi(e_1, X^2 - 1)e_1 + \phi(e_2, X^2 - 1)e_2 = 5 * \phi(X^2, X^2 - 1)X^2 + 7\phi(6X^3 - 5X^2, X^2 - 1)(6X^3 - 5X^2),$$

où

$$\phi(X^2, X^2 - 1) = \int_0^1 t^2(t^2 - 1) dt = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = \frac{-2}{15},$$

$$\phi(6X^3 - 5X^2, X^2 - 1) = \int_0^1 t^2(6t - 5)(t^2 - 1) dt = \frac{1}{6},$$

donc

$$p_E(X^2 - 1) = 5 * \frac{-2}{15}X^2 + \frac{7}{6}(6X^3 - 5X^2) = -\frac{2}{3}X^2 + \frac{7}{6}(6X^3 - 5X^2)$$

#### Exercice 2 :

Quel que soit le paramètre  $x$ , la matrice est symétrique réelle, donc diagonalisable. Elle est de rang 2, donc 0 est valeur propre de la matrice avec multiplicité  $4 - 2 = 2$ . Les deux autres valeurs propres sont données par le polynôme caractéristique :

$$\det \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda I_4 \right) = \lambda^2(\lambda^2 - 1 - x\lambda),$$

qui a pour racines autres que 0 :  $\lambda_{\pm} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 + 4}}{2}$  (et la somme des valeurs propres est bien égale à la trace de la matrice, à savoir  $x$ ). On a donc une valeur propre double 0 et deux valeurs propres simples  $\lambda_{\pm}$ .

**Exercice 3 :**

On fait le changement de variables en polaire dans l'intégrale :

$$\iint_{\mathcal{C}_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R e^{-r^2} r dr d\theta = 2\pi \int_{r=0}^R r e^{-r^2} dr = \pi \left[ -e^{-r^2} \right]_0^R = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

Le carré  $Q_{2R}$  centré en 0 et de côté  $2R$  est inclus dans le cercle  $\mathcal{C}_{\sqrt{2}R}$  de centre 0 et de rayon  $\sqrt{2}R$ , et contient le cercle  $C_R$  de centre 0 et de rayon  $R$  (faire un dessin!).

Donc comme on intègre une fonction positive, on a pour tout  $R$  :

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{Q_{2R}} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq \iint_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

Or,

$$\iint_{Q_{2R}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_{x=-R}^R \int_{y=-R}^R e^{-x^2} e^{-y^2} dy dx = \left( \int_{t=-R}^R e^{-t^2} dt \right)^2.$$

Donc

$$\sqrt{\pi(1 - e^{-R^2})} \leq \int_{t=-R}^R e^{-t^2} dt \leq \sqrt{\pi(1 - e^{-2R^2})}$$

Par théorème des gendarmes, la quantité au milieu converge vers  $\sqrt{\pi}$  quand  $R$  tend vers  $+\infty$ .