MP4 Université Paris 7
2011-2012 Denis Diderot

CORRIGE EXAMEN
Première Session

Exercice 1.

1. Pour intégrer en coordonnées sphériques, on considère le difféomorphisme

$$\varphi : U \to V, (\rho, \theta, \lambda) \mapsto (\rho \cos\theta \cos\lambda, \rho \sin\theta \cos\lambda, \rho \sin\lambda)$$

où , $R > 0$ étant fixé, on a $U =]0, R[\times] - \pi, \pi[\times] - \pi/2, \pi/2[$ et
$V = B_3(0; R) \smallsetminus \{(x, 0, z)/x^2 + z^2 < R^2, x \leq 0\}$. Ici on peut prendre $R \geq 1$ (pour que $D \subset B_3(0; R)$). Alors, si on pose $\Delta = \{(\rho, \theta, \lambda) \in U/\varphi(\rho, \theta, \lambda) \in D\}$, on a :

$$(\rho, \theta, \lambda) \in \Delta \Leftrightarrow 0 < \rho < 1\,,\ -\pi < \theta < \pi\,,\ -\pi/2 < \lambda < \pi/2\,,\ \rho \sin\lambda > 1/2.$$

Or, si $\rho < 1$, alors $\sin\lambda > \rho\sin\lambda > 1/2$ (car $\rho\sin\lambda > 1/2 > 0$ et $\rho > 0 \Rightarrow \sin\lambda > 0$) et donc $\pi/6 < \lambda < \pi/2$. D'où l'équivalence :

$$(\rho, \theta, \lambda) \in \Delta \Leftrightarrow -\pi < \theta < \pi\,,\ \pi/6 < \lambda < \pi/2\,,\ \frac{1}{2\sin\lambda} < \rho < 1.$$

Δ est un ouvert quarrable de $\mathbb{R}^3$ et on a la formule de changement de variables :

$$I = \iiint_D \frac{z}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Delta \frac{\rho\sin\lambda}{\sqrt{\rho^6}}\rho^2 \cos\lambda\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda$$

ou encore :
$I = \iiint_\Delta \sin\lambda\cos\lambda\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\lambda = \int_{-\pi}^{\pi}(\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\lambda\cos\lambda(\int_{1/2\sin\lambda}^{1} \mathrm{d}\rho)\mathrm{d}\lambda)\mathrm{d}\theta =$
$2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\lambda\cos\lambda(\int_{1/2\sin\lambda}^{1} \mathrm{d}\rho)\mathrm{d}\lambda = 2\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\lambda\cos\lambda(1 - \frac{1}{2\sin\lambda})\mathrm{d}\lambda =$
$\pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}(2\sin\lambda\cos\lambda - \cos\lambda)\mathrm{d}\lambda.$

2. On a $I = \pi\int_{\pi/6}^{\pi/2} 2\sin\lambda\cos\lambda\,\mathrm{d}\lambda - \pi\int_{\pi/6}^{\pi/2}\cos\lambda\,\mathrm{d}\lambda = \pi[\sin^2\lambda]_{\pi/6}^{\pi/2} - \pi[\sin\lambda]_{\pi/6}^{\pi/2} = \pi(1 - 1/4) - \pi(1 - 1/2) = 3\pi/4 - \pi/2 = \pi/4.$

Exercice 2.

1. (a) Soit $v_0 = (1, 1, -1, -1)$. Alors, pour tout vecteur $v = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on a les équivalences: $v \in E \Leftrightarrow x + y - z - t = 0 \Leftrightarrow \langle v, v_0\rangle = 0 \Leftrightarrow v \in \{v_0\}^\perp$. Donc $E = \{v_0\}^\perp = Vect\{v_0\}^\perp$. D'où $E^\perp = Vect\{v_0\}^{\perp\perp} = Vect\{v_0\}$. Alors $\varepsilon_0 = \frac{v_0}{\|v_0\|} = \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1)$ est une base orthonormée de $E^\perp$.

(b) Soient π et π' les projecteurs orthogonaux sur E et $E^\perp$. Comme ε_0 est une base orthonormée de $E^\perp$ on a $\forall v \in \mathbb{R}^4$, $\pi'(v) = \langle v, \varepsilon_0\rangle\varepsilon_0 = \frac{\langle v,v_0\rangle}{\|v_0\|^2}v_0$. En particulier $\pi'(u) = \frac{\langle u,v_0\rangle}{\|v_0\|^2}v_0$. Or $\langle u, v_0\rangle = a+b-c-d$ et $\| v_0 \|^2= 4$. Donc $\pi'(u) = \frac{1}{4}(a+b-c-d)v_0$.

(c) Sachant que $\pi(u) + \pi'(u) = u$, on peut écrire:
$d(u,E) =\| u - \pi(u) \|=\| \pi'(u) \|= \frac{1}{4}|a+b-c-d|.\| v_0 \|= \frac{1}{2}|a+b-c-d|$.

2. (a) Si $\underline{e} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on a:
$\det(e_4, v_1, v_2, v_3) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \underset{*}{=} -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$
$(*)$ où $C_2' = C_2 - C_1$ et $C_3' = C_3 - C_1$.
(e_4, v_1, v_2, v_3) est donc une base de $\mathbb{R}^4$ et (v_1, v_2, v_3) est libre. De plus, clairement, $v_1, v_2, v_3 \in E$, et donc $Vect\{v_1, v_2, v_3\} \subset E \neq \mathbb{R}^4$. D'où $3 = \dim Vect\{v_1, v_2, v_3\} \leq \dim E \leq 3$. Ainsi $\dim E = \dim Vect\{v_1, v_2, v_3\} = 3$ et donc $Vect\{v_1, v_2, v_3\} = E$. (v_1, v_2, v_3) étant libre et engendrant E, c'est une base de E.

(b) Soient, respectivement, $\underline{w} = (w_1, w_2, w_3)$ et $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$, l'orthogonalisé et l'orthonormalisé de $\underline{v}$ dans E. Alors, on sait que:

$$w_1 = v_1 \, , \, w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{\| w_1 \|^2}w_1 \, , \, w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{\| w_1 \|^2}w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{\| w_2 \|^2}w_2.$$

où $\langle v_2, w_1\rangle = 8$ et$\| w_1 \|^2= 4$. Donc $w_2 = v_2 - \frac{8}{4}w_1 = v_2 - 2w_1 = (3,1,3,1) + (-2,-2,-2,-2) = (1,-1,1,-1)$ et $\| w_2 \|^2= 4$. On a aussi
$\langle v_3, w_1\rangle = 4$, $\langle v_3, w_2\rangle = -4$ et donc:
$w_3 = v_3 - \frac{4}{4}w_1 - \frac{(-4)}{4}w_2 = v_3 - w_1 + w_2 = (1,1,-1,3) + (-1,-1,-1,-1) + (1,-1,1,-1) = (1,-1,-1,1)$ avec $\| w_3 \|^2= 4$. On en déduit que:

$$\varepsilon_1 = \frac{w_1}{\| w_1 \|} = \frac{1}{2}(1,1,1,1) \, , \, \varepsilon_2 = \frac{w_2}{\| w_2 \|} = \frac{1}{2}(1,-1,1,-1) \, , \, \varepsilon_3 = \frac{w_3}{\| w_3 \|} = \frac{1}{2}(1,-1,-1,1).$$

(c) On a vu que $w_2 = v_2 - 2w_1$ et que $w_3 = v_3 - w_1 + w_2$. On en déduit que $v_2 = 2w_1 + w_2$ et $v_3 = w_1 - w_2 + w_3$, ou encore $v_2 = 4\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2$ et $v_3 = 2\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + 2\varepsilon_3$ et donc, comme $\underline{\varepsilon}$ est une base orthonormée directe de E, on a :
$v_2 \wedge v_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\varepsilon_1 - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\varepsilon_2 - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\varepsilon_3 = 4\varepsilon_1 - 8\varepsilon_2 - 12\varepsilon_3 = 2w_1 - 4w_2 - 6w_3 = (2,2,2,2) + (-4,4,-4,4) + (-6,6,6,-6) = (-8,12,4,0).$

Exercice 3.

1. M tant symétrique, f l'est aussi car la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est orthonormée. f est donc diagonalisable (dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$).

2.
$$ {}^tMM = MM = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{7^2}\begin{pmatrix} 49 & 0 & 0 \\ 0 & 49 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{pmatrix} = I $$

M est donc une matrice orthogonale et, de ce fait, f est un endomorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$, car sa base canonique est orthonormée.

3. f étant un endomorphisme à la fois symétrique et orthogonal, c'est donc une symétrie orthogonale. On peut donc écrire $f = s_F$ où $F = \{v \in \mathbb{R}^3 / f(v) = v\} = \{v \in \mathbb{R}^3 / (f - Id)(v) = 0\}$. Or
$$ M - I = \frac{1}{7}[\begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \\ -3 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}] = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \\ -3 & 6 & -9 \end{pmatrix} $$
Donc, si $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a les équivalences :
$$ v \in F \iff (M-I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \left\{ \begin{array}{r} -x + 2y - 3z = 0 \\ 2x - 4y + 6z = 0 \\ -3x + 6y - 9z = 0 \end{array} \right\} \iff -x+2y-3z = 0. $$
Ainsi $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + 2y - 3z = 0\}$.

4. Soit $v_1 = (1, -2, 3)$. Alors $v = (x, y, z) \in F \iff \langle v, v_1 \rangle = 0 \iff v \in \{v_1\}^\perp$. Donc $F = \{v_1\}^\perp = Vect\{v_1\}^\perp$ et donc $F^\perp = Vect\{v_1\}^{\perp\perp} = Vect\{v_1\}$. Alors $\varepsilon_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, -2, 3)$ forme une base orthonormée de $F^\perp$.
Clairement $v_2 = (2, 1, 0) \in F$. Posons ensuite $v_3 = v_1 \wedge v_2 = (-3, 6, 5)$. Comme $v_3 \perp v_1$, on a $v_3 \in \{v_1\}^\perp = F$, mais aussi $v_3 \perp v_2$. Ainsi (v_2, v_3) est une base orthogonale de F (car $\dim F = 3 - \dim F^\perp = 3 - 1 = 2$). Alors, si $\varepsilon_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ et $\varepsilon_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{70}}(-3, 6, 5)$, on voit que $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée de F.

5. $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ (car ε_1 est une base orthonormée de $F^\perp$ et $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une base orthonormée de F) et on a $f(\varepsilon_1) = s_F(\varepsilon_1) = -\varepsilon_1$ (car $\varepsilon_1 \in F^\perp$), $f(\varepsilon_2) = s_F(\varepsilon_2) = \varepsilon_2$ et $f(\varepsilon_3) = s_F(\varepsilon_3) = \varepsilon_3$ (car $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in F$). On en déduit que :
$$ Mat(f, \underline{\varepsilon}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. $$
f se diagonalise donc dans $\underline{\varepsilon}$.

Exercice 4.

1. Soit A la matrice du système et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A(\lambda) = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -4 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = (\lambda - 2i)(\lambda + 2i)$. A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ car ses racines sont simples. Recherchons une base de vecteurs propres de A. Soit $V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$. Alors on a les équivalences :
$AV = 2iV \iff (A - 2iI)V = \begin{pmatrix} -2i & 1 \\ -4 & -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff -2ix + y = 0 \iff$
$y = 2ix \iff V = \begin{pmatrix} x \\ 2ix \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$.
$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix}$ est donc une base de l'espace propre associé à $2i$. Alors $V_2 = \bar{V_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix}$ est une base de l'espace propre associé à $\bar{2i} = -2i$. On en déduit que les applications $Z, \bar{Z} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^2$ où $Z(t) = e^{2it}V_1$ et $\bar{Z(t)} = e^{-2it}\bar{V_1}$ forment une base de l'espace vectoriel complexe des solutions complexes de (H).

2. Soit $X(t) = \Re Z(t)$ et $Y(t) = \Im Z(t)$. On sait que (X, Y) est une base de l'espace vectoriel réel des solutions réelles de (H). Or

$$Z(t) = (\cos 2t + i \sin 2t) \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ -2 \sin 2t + 2i \cos 2t \end{pmatrix}$$

Donc $X(t) = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -2 \sin 2t \end{pmatrix}$ et $Y(t) = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$.

3. Soit $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'application constante sur $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (où $a, b \in \mathbb{R}$). Alors, C est solution de (S) ssi Pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a :

$$\begin{cases} 0 = x'(t) = y(t) + 1 = b + 1 \\ 0 = y'(t) = -4x(t) + 1 = -4a + 1 \end{cases}$$

On obtient $b = -1$ et $a = 1/4$. Donc $C(t) = \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

4. Soit $S(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ la solution recherchée (On sait qu'elle existe et qu'elle est unique par le théorème général donné dans le cours). Alors elle s'écrit :
$S(t) = \lambda X(t) + \mu Y(t) + C(t)$. où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ sont des constantes à déterminer. Or les

conditions initiales nous imposent que :
$\begin{pmatrix} 5/4 \\ 1 \end{pmatrix} = S(0) = \lambda X(0) + \mu Y(0) + C(0) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 1/4 \\ 2\mu - 1 \end{pmatrix}.$
D'où le système linéaire à résoudre :

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda + 1/4 = 5/4 \\ 2\mu - 1 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \lambda = \mu = 1$$

Ainsi, la solution recherchée du système s'écrit :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 2t + \sin 2t + 1/4 \\ y(t) = -2 \sin 2t + 2 \cos 2t - 1 \end{cases}$$