Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence de Physique , L2

Cours de Mathématiques-MP4
2010-2011, 2^{nd} semestre

Feuille de TD 7
Espaces Euclidiens

Exercice 1 :
Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{tr}({}^tAB)$ de $M_2(\mathbb{R}) \times M_2(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un produit scalaire. Calculer l'orthogonal de l'ensemble des matrices diagonales puis celui des matrices symétriques.

Exercice 2 :
Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique, déterminer la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y + z = 0$ de $(1, 0, 0)$, et plus généralement d'un vecteur (x, y, z) quelconque. Donner la matrice de cette projection ainsi que celle de la symétrie orthogonale par rapport à ce plan.

Exercice 3 :
Dans un espace euclidien de dimension n, on considère un sous-espace F de dimension r et $(f_1, \ldots, f_r)$ une base orthonormée de cet espace. On note p_F la projection orthogonale sur F, c'est à dire la projection sur F associée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.
Montrer que :

$$\forall v \in F, \qquad p_F(v) = < v, f_1 > f_1 + < v, f_2 > f_2 + \cdots + < v, f_r > f_r.$$

Exercice 4 :
Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, donner la matrice de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + 2y - 3z = 0$. Donner la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à ce même plan.

Exercice 5 :
Quelle est la transformation de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 6 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & 6 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 6 :
Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(v_1, v_{2)}$ où $v_1 = (1, -1, 0, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, 1)$.

Exercice 7 :
Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 \Big(e^x - (ax + b)\Big)^2 dx.$

Exercice 8 :
Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^5$ engendré par $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ et $v = (2, 4, 7, 2, -1)$. Trouver une base de l'orthogonal $F^\perp$ de F.

Exercice 9 :
1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que A définit un produit scalaire φ sur $\mathbb{R}^3$. Construire une base orthonormale pour φ.

2. Considérons la base (u_1, u_2, u_3) de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, où

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (0,1,1), \quad u_3 = (0,0,1).$$

Utiliser le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt pour transformer $\{v_i\}$ en une base orthonormale.

Exercice 10 :
Soient $E = \mathbb{R}_n[X]$, $I_n = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^n e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente. Que vaut I_{2p+1}?

Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(P,Q) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t) e^{\frac{-t^2}{2}}\, dt$.

2. Montrer que φ est un produit scalaire.
3. On suppose $n = 2$. Écrire la matrice associée à φ dans la base $(1, X, X^2)$. Construire une base orthonormale (P_0, P_1, P_2) par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt appliqué à $(1, X, X^2)$.

Exercice 11 :
$\mathbb{R}^3$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Vérifier que les vecteurs $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (1,0,2)$ et $u_3 = (1,1,1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ et en déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt.

Exercice 12 :
$\mathbb{R}^4$ est muni de sa structure canonique d'espace vectoriel euclidien. Soient $u_1 = (1,0,1,0)$, $u_2 = (1,-1,1,-1)$ et $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal sur F.
3. Déterminer la distance du vecteur $(1,1,1,1)$ au sous-espace vectoriel F.
4. Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.

Exercice 13 :
On munit le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$ du produit scalaire ϕ défini sur $\mathbb{R}_2[X] \times \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\phi(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\, dt.$$

1. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer la distance du polynôme $P = X^2 + X + 1$ au sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}_2[X]$ formé des polynômes f tels que $f'(0) = 0$.

Exercice 14 :
Soit $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie de la manière suivante : si $u = (x,y,z)$ et $u' = (x', y', z')$ alors

$$f(u,u') = 2xx' + yy' + 2zz' + xy' + yx' + xz' + zx' + yz' + zy'.$$

1. Montrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Soit P le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation cartésienne $2x - y + z = 0$.
   (a) Déterminer l'orthogonal du sous-espace vectoriel P.

   (b) Déterminer un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont l'orthogonal est P.

3. Déterminer l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ pour f.

Exercice 15 :
Orthonormaliser dans $\mathbb{R}^3$ la famille $u_1 = (1, -2, -2)$, $u_2 = (-1, 0, -1)$ et $u_3 = (5, -3, 7)$.

Exercice 16 :
A deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}_n[X]$, on associe le nombre

$$\phi(P, Q) = \int_0^1 P'(t)Q'(t)\,dt + P(0)Q(0).$$

1. Montrer que ϕ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Lorsque $n = 2$, donner une base orthonormée pour ce produit scalaire.