Université Paris 7 - Denis Diderot
Licence de Physique , L2

Cours de Mathématiques-MP4
2010-2011, 2^{nd} semestre

Feuille de TD 3

Intégrales impropres

Exercice 1 :
Etudier la nature des intégrales suivantes et déterminer leur valeur si elles convergent :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}; \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)t^2}; \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt; \qquad I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^3)^2}.$$

Exercice 2 :
Étudier la convergence des intégrales :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\, dt; \qquad J = \int_0^1 \frac{\log x}{1-x}\, dx; \qquad K = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{\sqrt[3]{(x^2-x-2)^2}}dx.$$

Exercice 3 :
Calculer à l'aide d'un changement de variable les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}dt; \qquad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \log(\tan t) dt; \qquad I_3 = \int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}, \text{ où } a < b$$

Exercice 4 :
Etudier la nature des intégrales :

$$I_1 = \int_0^1 \log t\; dt; \qquad I_2 = \int_0^{+\infty} \arcsin(\frac{\sin t}{t})dt; \qquad I_3 = \int_0^{+\infty} \cos(e^t)dt;$$
$$I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha}dt,\ \alpha > 0; \qquad I_5 = \int_0^{+\infty} (x+1-\sqrt{x^2+2x+2})dx; \qquad I_6 = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t};$$
$$I_7 = \int_0^1 \sin t \log t\; dt; \qquad I_8 = \int_1^{+\infty} \arctan\frac{1}{t}dt; \qquad I_9 = \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \log(\cos\frac{1}{t})dt;$$
$$I_{10} = \int_0^1 \frac{dt}{t^2-\sqrt{t}}; \qquad I_{11} = \int_0^{+\infty} (x^7-7x^4+16x^3-5x+2)e^{-x}dx; \qquad I_{12} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx;$$

Exercice 5 :
Déterminer pour quelles valeurs du paramètre réel $a \in \mathbb{R}$ les intégrales suivantes sont convergentes.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+a}dt; \quad I_2 = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}+a\sin x}{x^2}dx; \quad I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{5dx}{x^3-ax^2+x-a}$$

Exercice 6 :
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$(1) \quad \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt \quad (2) \quad \int_0^{+\infty} \tanh t\, dt \quad (3) \quad \int_0^1 \ln x\, dx \quad (4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\, dx$$

On calculera la valeur des intégrales convergentes

Exercice 7 :
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$(1) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} \quad (2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2} \quad (3) \quad \int_0^{+\infty} \cos t\, dt \quad (4) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dt}{t^2}$$

Exercice 8 :
Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad (2) \quad \int_0^1 \frac{e^t}{t}\, dt \quad (3) \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\left(\frac{1}{t}\right) dt \quad (4) \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{t^2}\, dt$$

Exercice 9 :
Etudier suivant les valeurs des réels $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale :

$$I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha(1+t^\beta)}.$$

Représenter graphiquement l'ensemble $C = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ I_{\alpha,\beta} \text{ converge}\}$.

Exercice 10 :
Soit $\alpha > 0$ et soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^\alpha \sin^2 x}.$$

1. Montrer que f est de classe C^∞, strictement positive puis que f n'est pas bornée.
2. Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$ nous avons :

$$\frac{\pi(-\pi/2+k\pi)}{\sqrt{1+(\pi/2+k\pi)^\alpha}} \leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\, dx \leqslant \frac{\pi(\pi/2+k\pi)}{\sqrt{1+(-\pi/2+k\pi)^\alpha}}$$

   En déduire que si $k \in \mathbb{N}^*$ est assez grand nous avons :

$$\frac{\pi^{2-\alpha/2}}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha/2-1}} \geqslant \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\, dx \geqslant 3\frac{\pi^{2-\alpha/2}}{2} \cdot \frac{1}{k^{\alpha/2-1}}$$

3. On considère la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$, définie par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+k\pi} \frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\, dx$$

   Montrer que la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}^*$, est convergente si et seulement si nous avons $\alpha > 4$.
4. En déduire que l'intégrale impropre

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^\alpha\sin^2 x}\, dx$$

   est convergente si et seulement si $\alpha > 4$.

Exercice 11 :

1. Montrer que la suite (u_n) suivante est divergente :

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \log k}, \quad n \in \mathbb{N}, \ n \geqslant 2.$$

2. Montrer que pour tout entier $k \geqslant 4$ nous avons :

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin^2 t dt}{t \log t} \geqslant \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{k \log k}.$$

3. En déduire que l'intégrale généralisée I suivante est divergente :

$$I = \int_{2}^{+\infty} \frac{\sin^2 t dt}{t \log t}$$